

*Wytrzymałość materiałów i konstrukcji 2*

Wykład 7

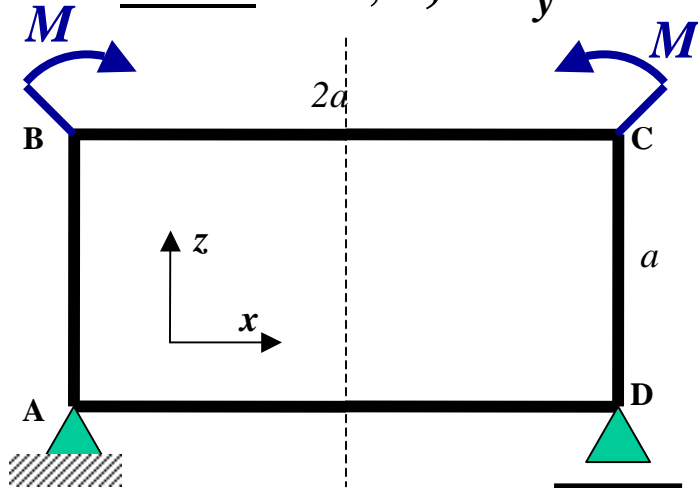
# Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

Uproszczenia wynikające z zasady  
jednoznaczności rozwiązania

*(przykłady)*

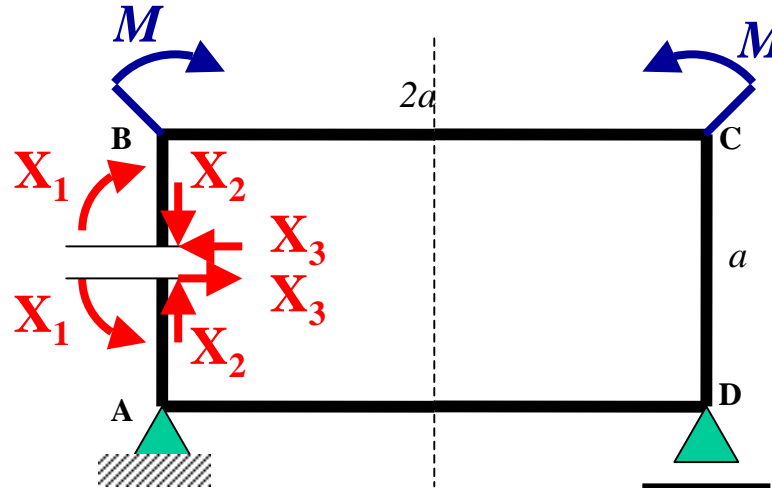
**Przykład.1.** Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz

Dane:  $M, a, EJ_y$



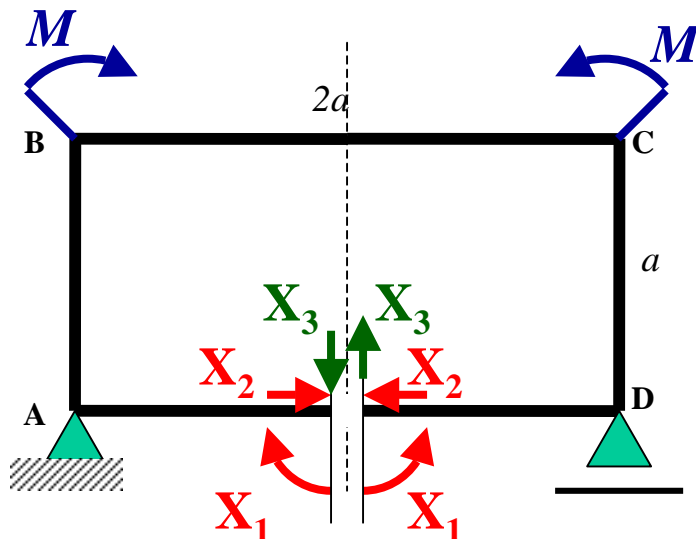
Zadanie statycznie wyznaczalne zewnątrz ale **statycznie niewyznaczalne wewnątrz**

WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie statycznie wyznaczalne zewnątrz ale **3 krotnie statycznie niewyznaczalne wewnątrz !**

WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



W ustroju liniowym i sprężystym jeden stan obciążenia wywołuje tylko jeden stan sił wewnętrznych!

**Konstrukcja symetryczna i obciążenie symetryczne!**  
Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją tylko **składowe symetryczne sił wewnętrznych:**

$X_1 \neq 0$     $X_2 \neq 0$

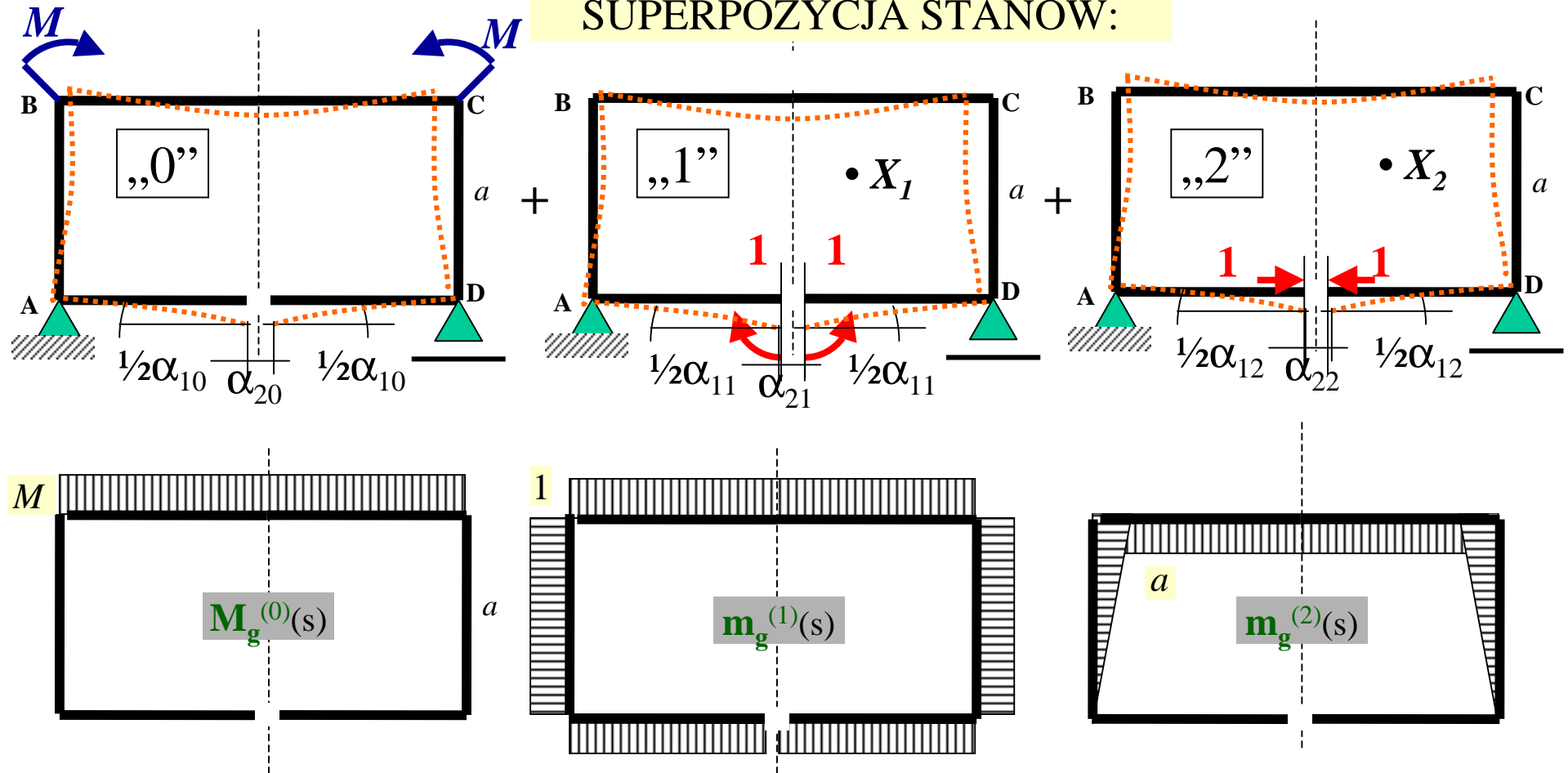
składowe symetryczne

$X_3 = 0$

składowa antysymetryczna

# Przykład.1. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie

## SUPERPOZYCJA STANÓW:

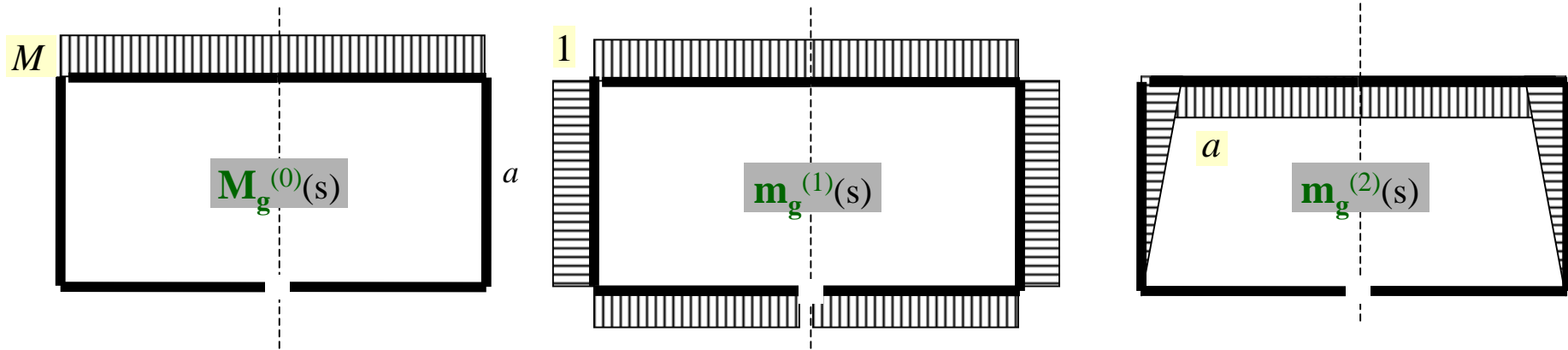


Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 &= 0 \\ \alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 &= 0 \end{aligned}$$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

# Przykład.1. Rama płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrz



Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = \frac{6a}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( -\frac{1}{2} a^2 \cdot 1 \cdot 2 - 2a^2 \cdot 1 \right) = -\frac{3a^2}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + 2a^2 \cdot a \right) = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 2aM \cdot 1 = \frac{2Ma}{EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 2aM \cdot (-a) = \frac{-2Ma^2}{EJ_y}$$

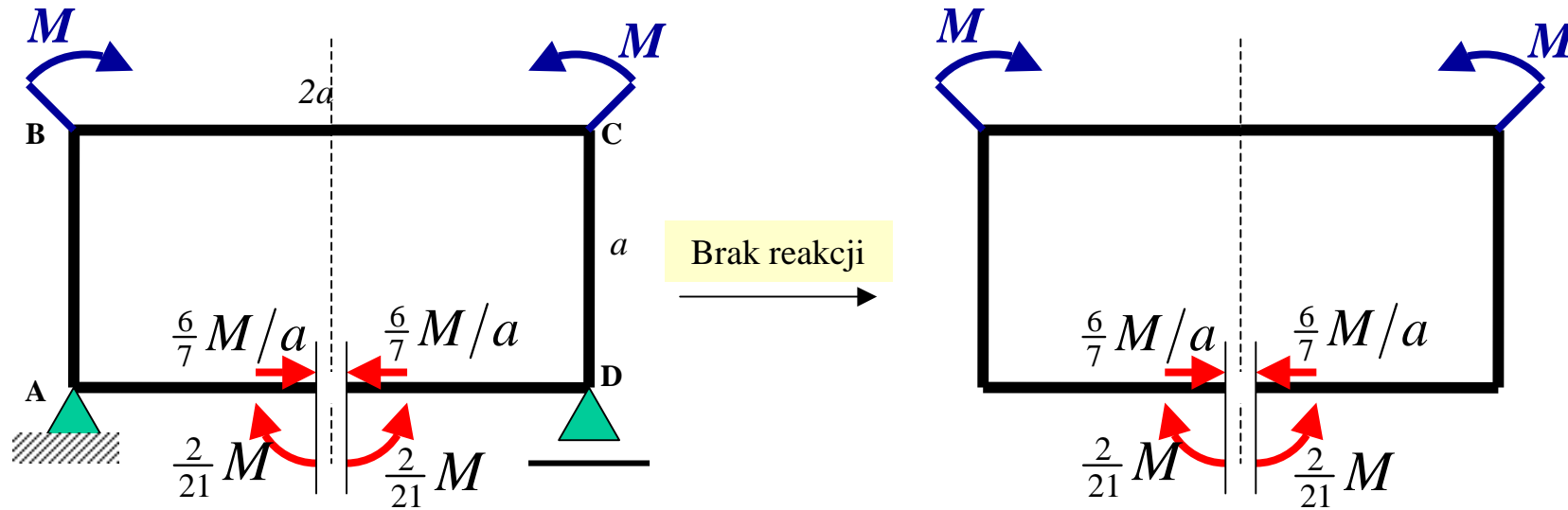
$$\frac{2Ma}{EJ_y} + \frac{6a}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{3a^2}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{-2Ma^2}{EJ_y} + \frac{3a^2}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

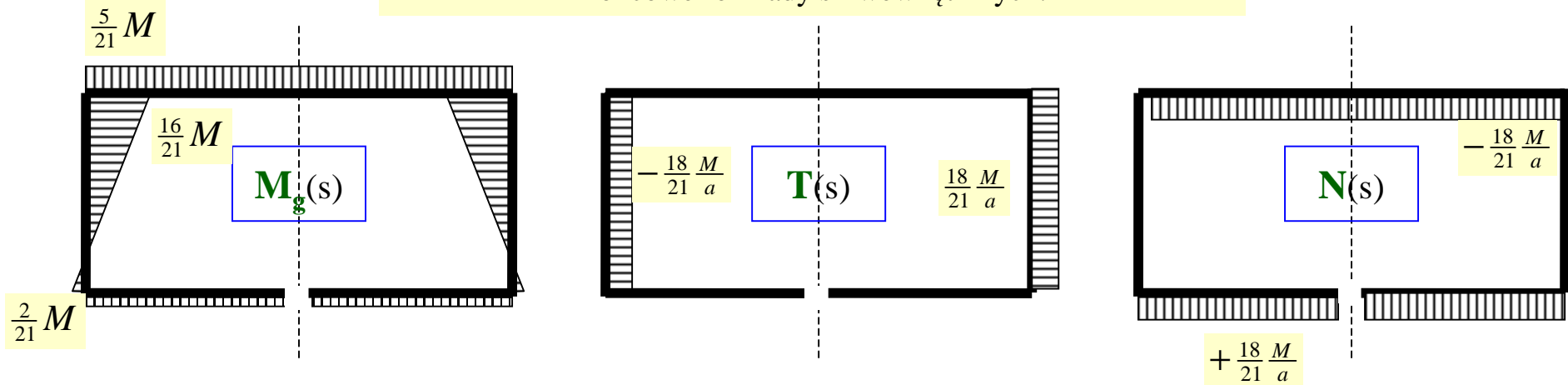
$$X_1 = \frac{2}{21} M$$

$$X_2 = \frac{6M}{7a}$$

# Przykład.1. Rama płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie

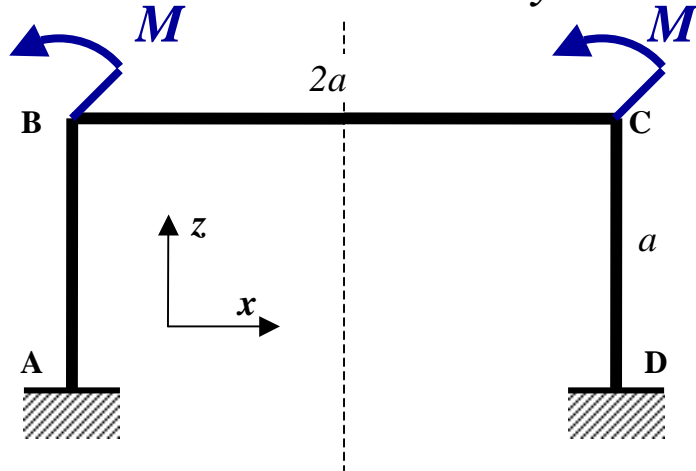


Końcowe rozkłady sił wewnętrznych:

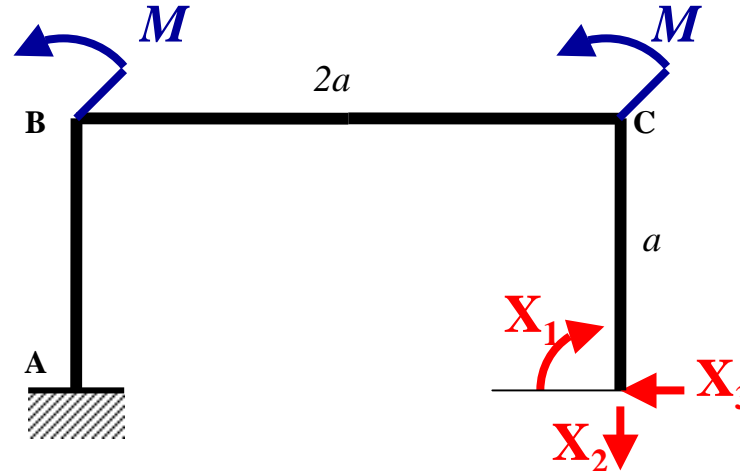


## Przykład.2. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną

Dane:  $M, a, EJ_y$

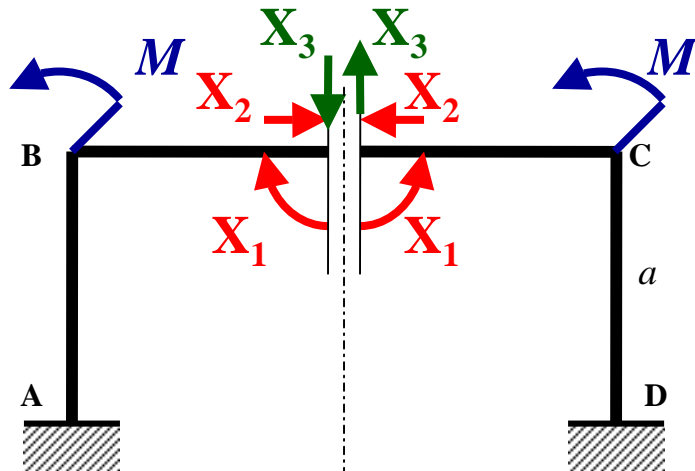


RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie 3 krotnie statycznie niewyznaczalne zewnętrznie !

WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne!

Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych:

$$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$$

składowe symetryczne

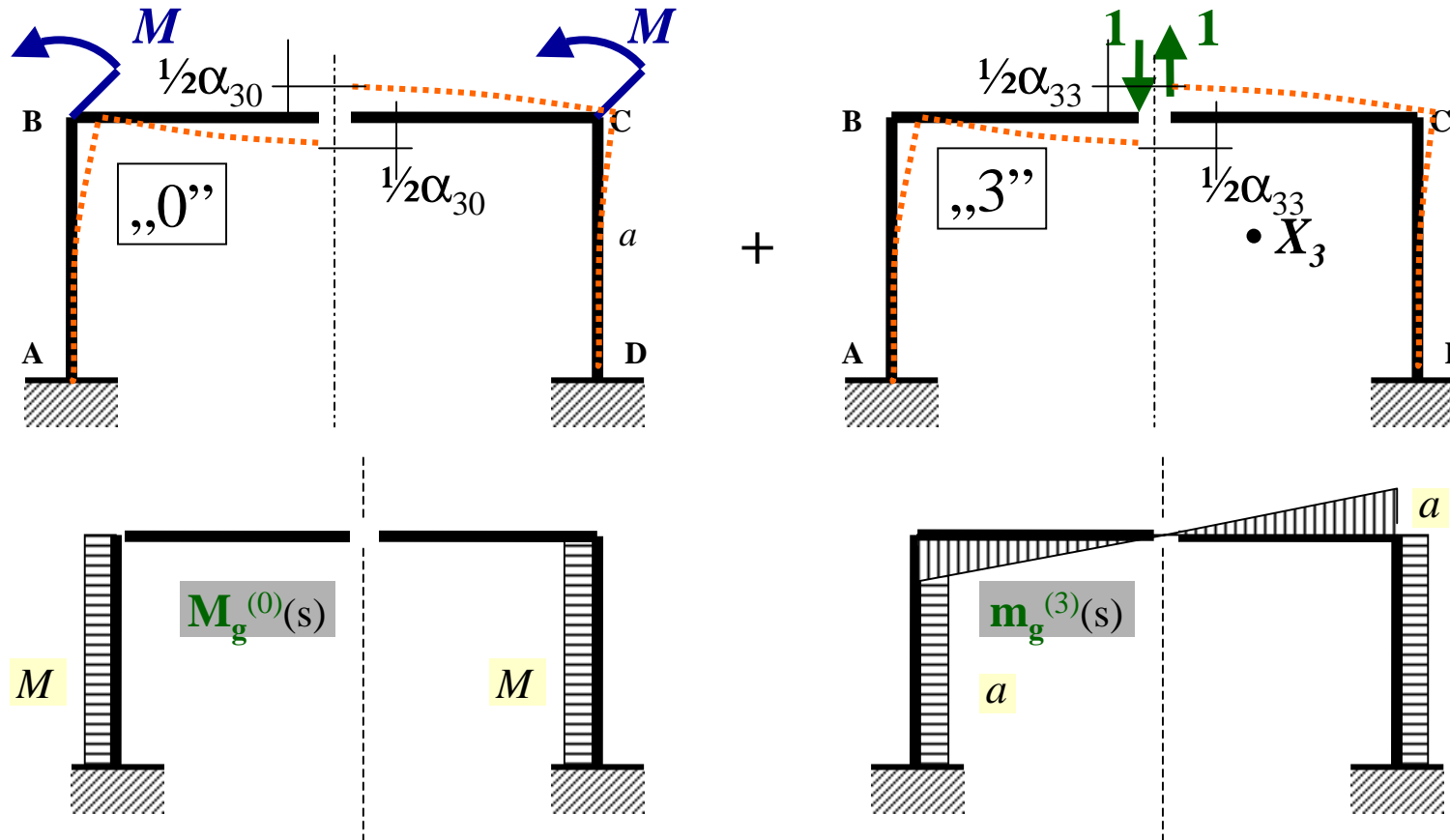
$$X_3 \neq 0$$

składowe antysymetryczne

Zadanie 1 krotnie statycznie niewyznaczalne wewnętrznie !

## Przykład.2. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie

### SUPERPOZYCJA STANÓW:

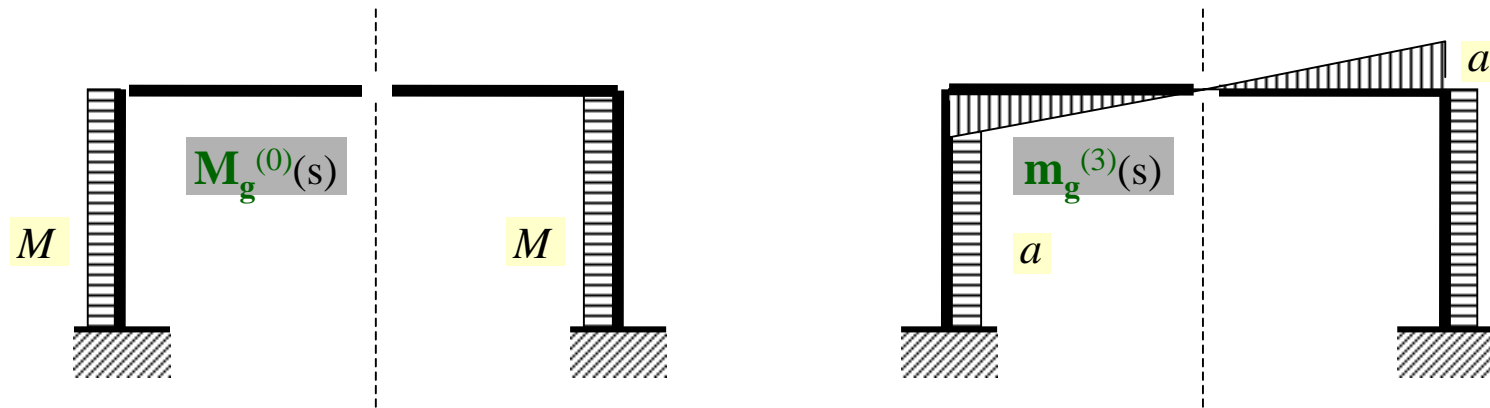


Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{30} + \alpha_{33} \cdot X_3 = 0$$

Równanie kanoniczne metody sił Maxwella-Mohra

## Przykład.2. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie

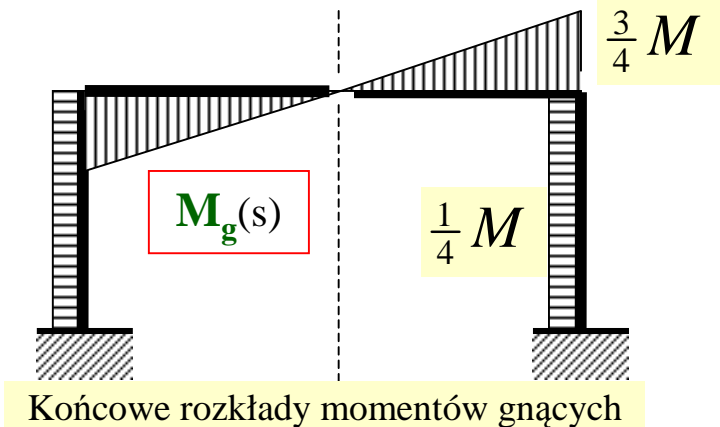
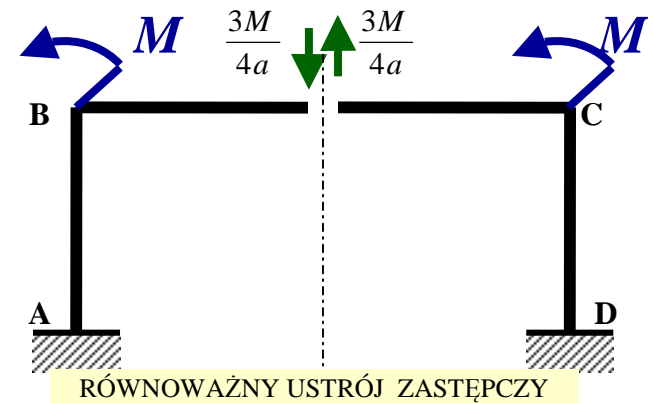


Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{33} \cong \int_l \frac{m^{(3)} \cdot m^{(3)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a \right) \cdot 2 = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{30} \cong \int_l \frac{m^{(3)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} (aM \cdot (-a)) \cdot 2 = -\frac{2Ma^2}{EJ_y}$$

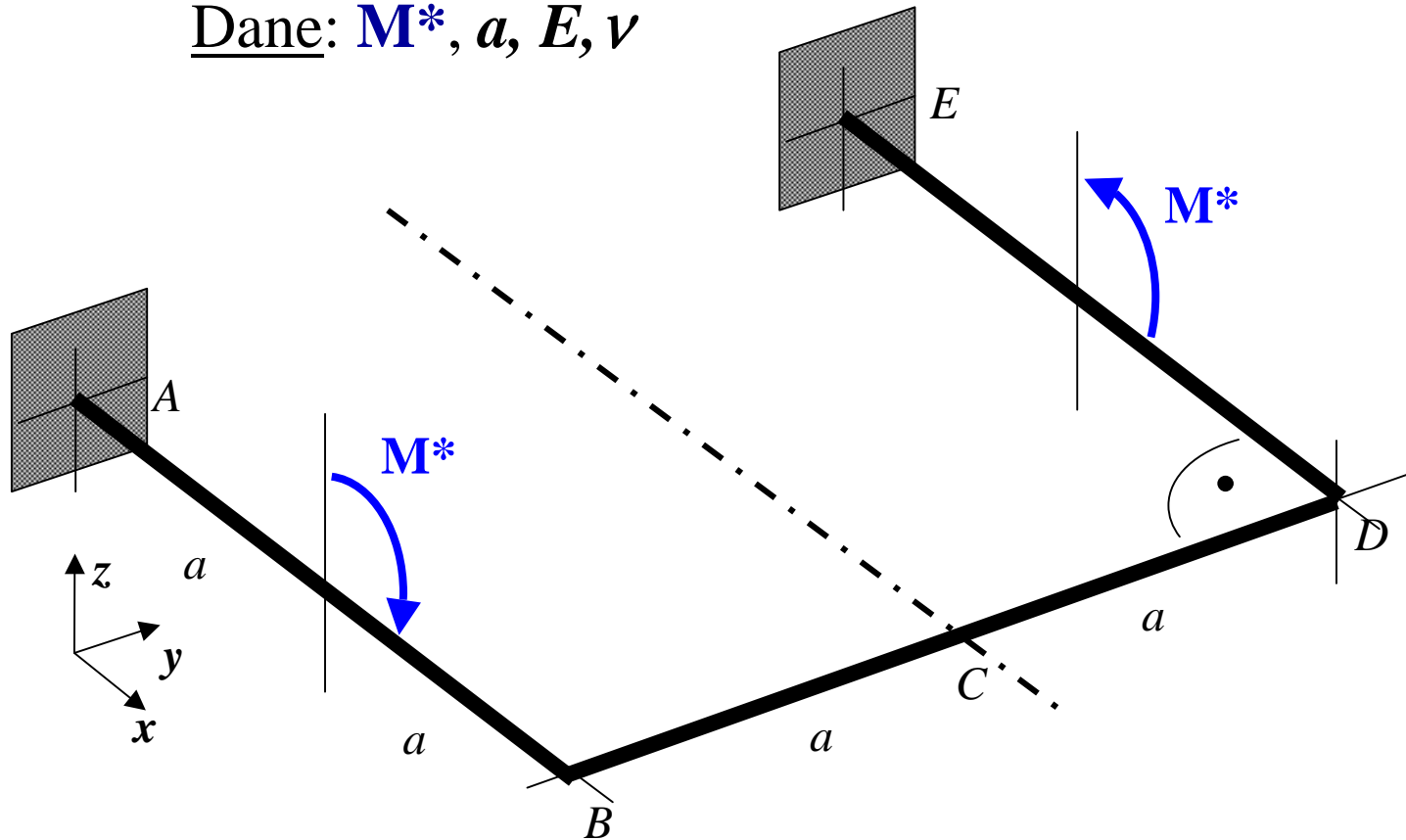
$$-\frac{2Ma^2}{EJ_y} + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_3 = 0 \quad \rightarrow \quad X_3 = \frac{3M}{4a}$$





**Przykład.3.** Rozwiązać ramę płaską statycznie niewyznaczalną obciążoną niepłasko

Dane:  $M^*$ ,  $a$ ,  $E$ ,  $\nu$

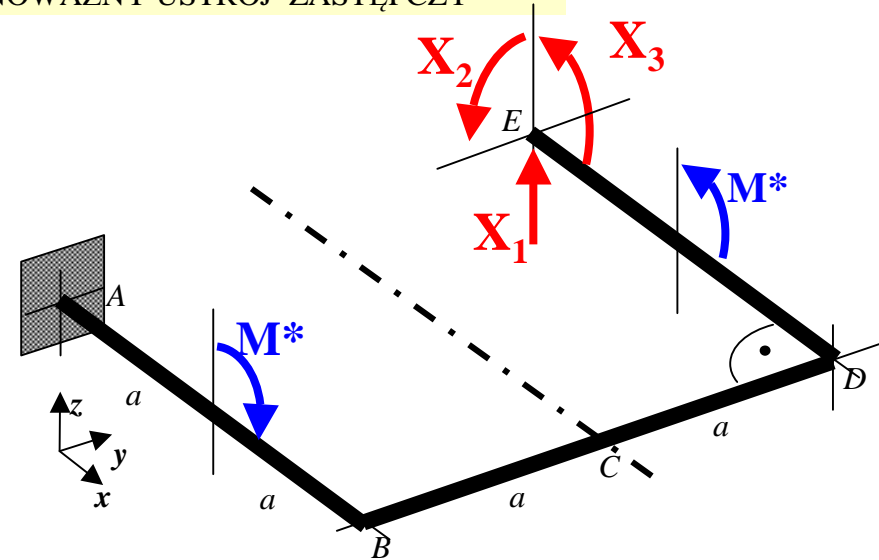
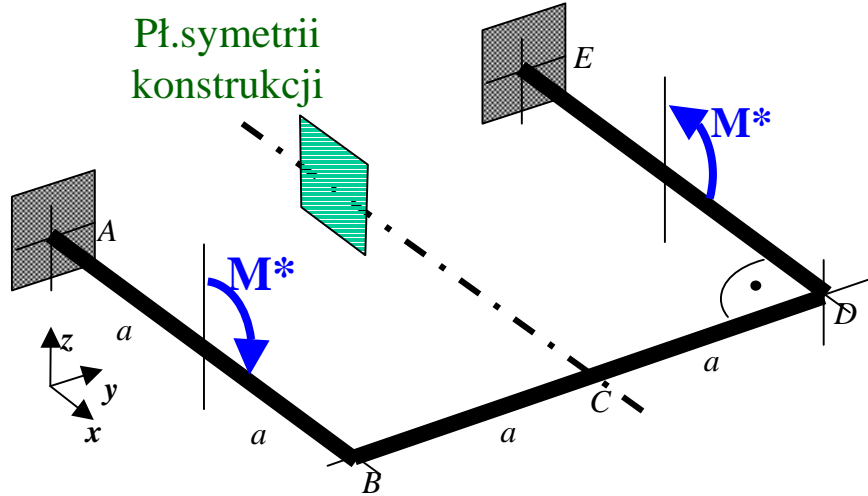


Charakterystyki przekroju:

$$GJ_s = \frac{10}{13} EJ_y$$

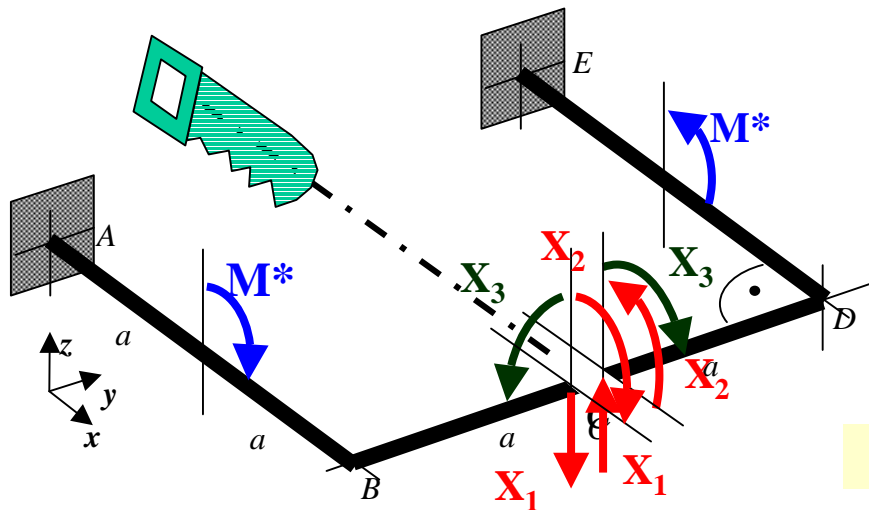
# Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepłasko

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie 3 krotnie statycznie niewyznaczalne zewnętrznie !

WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne!

Jeśli przetniemy w płaszczyźnie symetrii, to istnieją tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych:

$$X_1 \neq 0 \quad X_2 \neq 0$$

składowe antysymetryczne

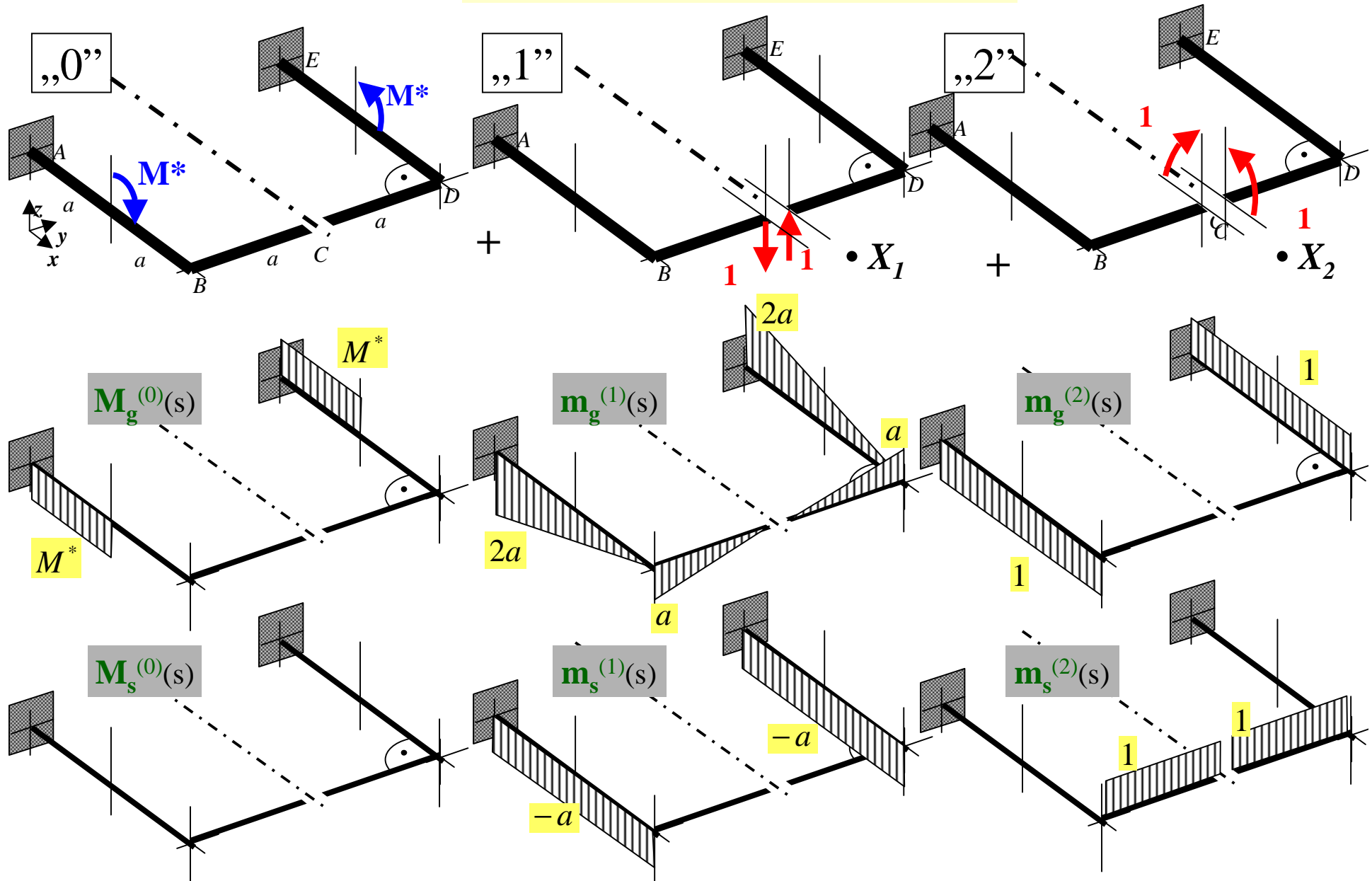
$$X_3 = 0$$

składowe symetryczne

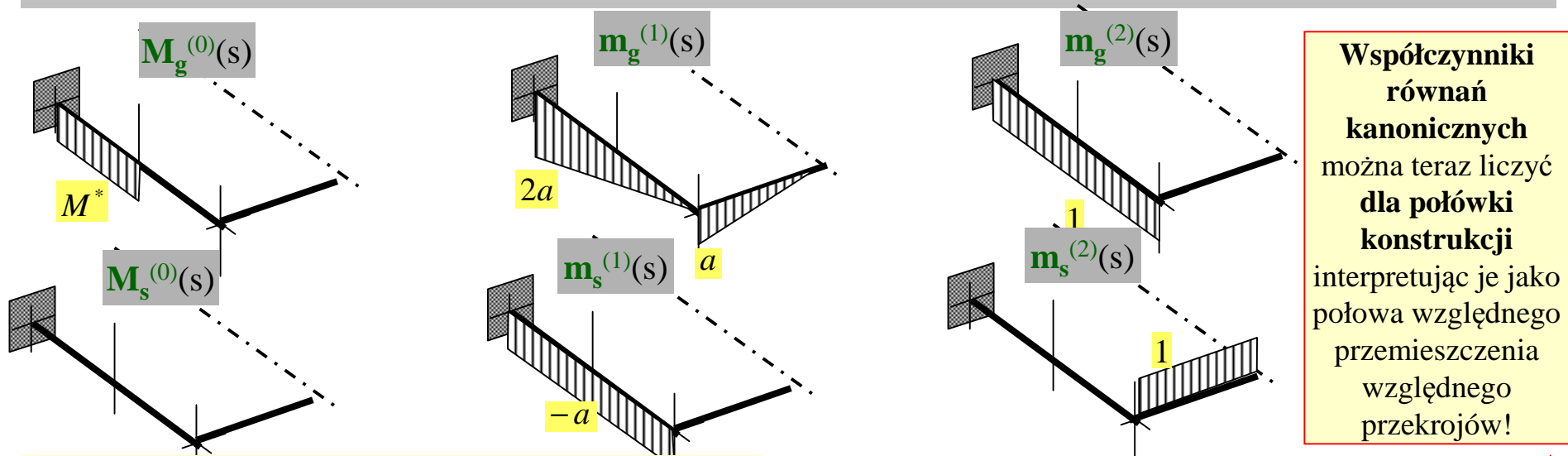
Zadanie 2 krotnie statycznie niewyznaczalna wewnętrznie !

# Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepełsko

## SUPERPOZYCJA STANÓW:



### Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepełsko



Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot \frac{2}{3} 2a + \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{1}{GJ_s} 2a^3 = \frac{3a^3}{EJ_y} + \frac{13}{10} \frac{2a^3}{EJ_y} = \frac{56a^3}{10EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot a + 0 = \frac{2a^3}{EJ_y}$$

$$\alpha_{22} \cong \frac{1}{EJ_y} 2a \cdot 1 + \frac{1}{GJ_s} a \cdot 1 = \frac{2a}{EJ_y} + \frac{13}{10} \frac{a}{EJ_y} = \frac{33a}{10EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \frac{1}{EJ_y} M^* a \frac{3}{4} 2a + 0 = \frac{3M^* a^2}{2EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \frac{1}{EJ_y} M^* a \cdot 1 + 0 = \frac{M^* a}{EJ_y}$$

$$\frac{3M^* a^2}{2EJ_y} + \frac{56a^3}{10EJ_y} \cdot X_1 + \frac{2a^3}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{M^* a}{EJ_y} + \frac{2a^3}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{33a}{10EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

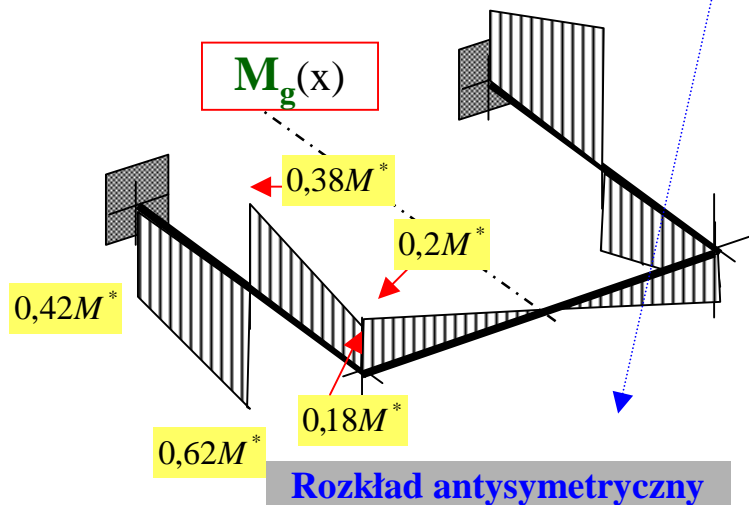
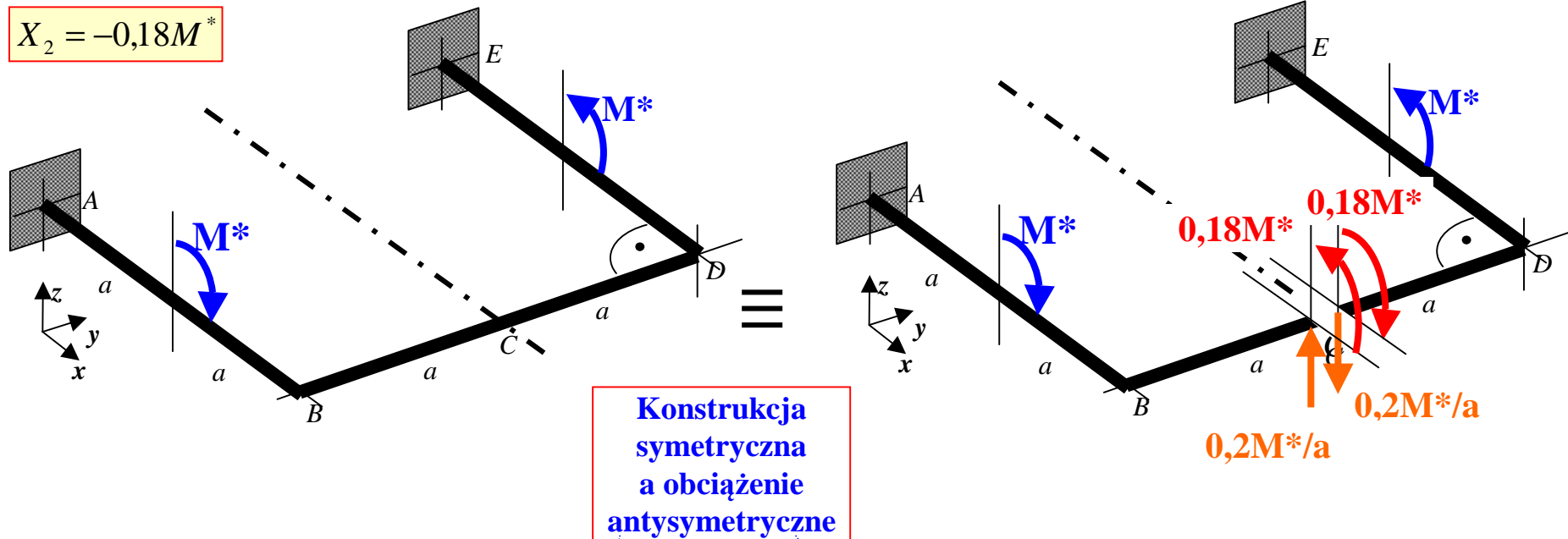
$$\rightarrow X_1 = -0,2 M^* / a \quad X_2 = -0,18 M^*$$

# Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepiasko

$$X_1 = -0,2M^*/a$$

$$X_2 = -0,18M^*$$

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY:



Końcowe rozkłady momentów wewnętrznych

